Άσκηση 2 / σελ. 467: Αν ο μ.χ. (E, d) είναι πλήρης ν' αποδειχθεί ότι και ο μ.χ. (E, ρ), όπου $d = \min\{1, \rho\}$ είναι πλήρης.

Λύση

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ρ-βασική

$$\left.\begin{array}{l}(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0\in\mathbb{N})(\forall \nu,\mu\in\mathbb{N}) \begin{array}{l}\nu>\nu_0\\ \mu>\nu_0\end{array} \Rightarrow \rho(a_\nu, a_\mu) < \varepsilon \\[2em] \text{Έχουμε} \quad d = \min\{1,\rho\}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(a_\nu, a_\mu) < \rho(a_\nu, a_\mu) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(a_\nu, a_\mu) < \varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \ d\text{-βασική} \\[1em] \text{Όμως } (E, d) \text{ πλήρης}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \ell : d\text{-}\lim a_\nu = \ell$$

$$\xrightarrow[\text{ισοδύναμες}]{\text{οι } d,\rho} \rho\text{-}\lim a_\nu = \ell$$

Άρα ο (E, ρ) πλήρης.

Scanned by CamScanner

Άσκηση 7/σελ.471: Να αποδειχθεί ότι αν κάθε φραγμένο υποσύνολο ενός μ.χ. E έχει ένα τουλάχιστον σ.σ. τότε ο E είναι πλήρης μχ

Λύση

Έστω ότι ο E δεν είναι πλήρης.
Επομένως θα υπάρχει $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική και όχι συγκλίνουσα.

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική $\Rightarrow$ $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ φραγμένη

$\Rightarrow A=\{a_\nu : \nu\in\mathbb{N}\}$ φραγμένο

$\xrightarrow{\text{από υπόθεση}}$ το A έχει $\exists$ τουλάχιστον σσ.

Άρα η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Έχουμε: $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική με συγκλίνουσα υπακολουθία,
άρα συγκλίνει $\lightning$ αφού $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει

Άσκηση 15/σελ.477: Ας είναι E_1, E_2 δύο μ.χ. Υποθέτουμε ότι ο E_1 είναι πλήρης και ότι $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη και συνεχής συνάρτηση. Ν' αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση $f^{-1}: E_2 \to E_1$ είναι ομοιομ. συνεχής τότε και ο E_2 είναι πλήρης μ.χ

Λύση

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική στον E_2.
Θ.δ.ο. $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα.

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική $\Rightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall \nu,\mu\in\mathbb{N})\ {\nu>\nu_0 \atop \mu>\mu_0} \Rightarrow \rho_2(a_\nu,a_\mu)<\varepsilon$

f^{-1} ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow \Big\{ (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall y_1,y_2\in E_2)\ \rho_2(y_1,y_2)<\delta$
$\Rightarrow \rho_1(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))<\varepsilon$
αφού η $f^{-1}: E_2\to E_1$

Για $\delta=\varepsilon$: $\rho_1(f^{-1}(a_\nu), f^{-1}(a_\mu))<\varepsilon$

Άρα, $(f^{-1}(a_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική στον E_1

Scanned by CamScanner

Όμως E_1 πλήρης.
Άρα η $(f^{-1}(a_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα,
δηλ.
$$\underbrace{\lim f^{-1}(a_\nu)}\, = \ell$$

$$\xrightarrow{f \text{ συνεχής}} \lim f(f^{-1}(a_\nu)) = f(\ell)$$

$$\xrightarrow[f \text{ επί}]{f \text{ αμφ}} \lim a_\nu = f(\ell)$$

$\Rightarrow$ Άρα $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσα

Επομένως, ο χώρος E_2 είναι πλήρης.

Άσκηση 16 / σελ. 478: Με τη βοήθεια της αρχής της συστολής, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2x = \text{συν} x - 2$ έχει μία ακριβώς λύση στο διάστημα $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Λύση

Αρχή της συστολής: $\left.\begin{array}{l}(E, \rho) \text{ πλήρης} \\ f: E \to E \text{ συστολή}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ μοναδικό $x_0 \in E$: $f(x_0) = x_0$

ποιείτε έστω x

$$2x = \text{συν}x - 2 \Rightarrow \underbrace{x = \frac{1}{2}\text{συν}x - 1}_{\text{ώστε να έχω τη μορφή } f(x) = x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\text{συν}x - 1, \quad x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$

Γνωρίζουμε ότι: $\left.\begin{array}{l}(\mathbb{R}, |\,|) \text{ πλήρης} \\ \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \text{ κλειστό υποσύνολο του } \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow$

αφού κλειστό υποσύνολο πλήρους είναι πλήρες $\xRightarrow{4}$ $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ πλήρες

$$-1 \leq \sigma υνx \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sigma υνx \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\sigma υνx - 1}_{f(x)} \leq \frac{1}{2}$$

Άρα, $f\left(\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Έστω $x, y \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $x<y$.

Από ΘΜΤ στο $[x,y] \Rightarrow \exists \xi: f(x)-f(y) = f'(\xi)(x-y)$, $(*)$

συνεχής στο $[x,y]$

παραγωγίσιμη στο (x,y)

Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = -\frac{1}{2}\eta\mu x$

Παίρνω απόλυτες τιμές στην $(*)$.

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)(x-y)|$$
$$= \left|-\frac{1}{2}\eta\mu\xi\right| |x-y|$$
$$\leq \frac{1}{2}|x-y|$$

$\frac{1}{2} = \theta < 1$ άρα είναι συστολή

$\Rightarrow f$ συστολή

Άρα, από την αρχή της συστολής υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

τ.ω. $f(x_0) = x_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma υνx_0 - 1 = x_0$$

$$\Rightarrow \sigma υνx_0 - 2 = 2x_0$$

Scanned by CamScanner

ΟΡΙΣΜΟΣ Δύο μετρικές είναι ισοδύναμες $\rho_1 \sim \rho_2$, όταν:

$$i : (E,\rho_1) \to (E,\rho_2)$$
$$i(x) = x$$

i συνεχής $\iff \forall x_n \xrightarrow{\rho_1} x$, $\forall x \in E$

$$\Downarrow$$
$$x_n \xrightarrow{\rho_2} x$$

Όταν i αμφισυνεχής $\iff i, i^{-1}$ συνεχής

δηλ.
$$x_n \xrightarrow{\rho_1} x \iff x_n \xrightarrow{\rho_2} x$$

Τότε οι μετρικές είναι <u>ισοδύναμες</u>.

Όταν $\rho_1 \sim \rho_2$ και $i : (E,\rho_1) \to (E,\rho_2)$

Τα ανοιχτά εδώ, θα είναι ανοιχτά κι εκεί

Σε ισοδύναμες μετρικές, όταν (E,ρ_1) συμπαγής τότε και ο (E,ρ_2) συμπαγής.

Η ΣΥΜΠΑΓΕΙΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ, ΔΕΝ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΤΡΙΚΗ

Παράδειγμα: $(\mathbb{R}, \overset{\rho_1}{|\cdot|})$ $\quad \frac{1}{n} \xrightarrow{\rho_1} 0$

$(\mathbb{R}, \overset{\rho_2}{\rho_\delta})$ όμως $\frac{1}{n} \xrightarrow{\rho_2} 0$;

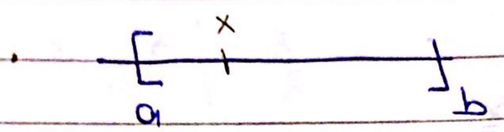
<u>όχι</u> γιατί $\rho_\delta\Big(\underbrace{\tfrac{1}{n}, 0}_{\text{αφού } \frac{1}{n} \neq 0}\Big) = 1 \ \forall n \not\to 0$

Άρα, $\rho \not\sim \rho_\delta$

Scanned by CamScanner

$([a,b], |\cdot|)$ συμπαγής με την $|\cdot|$ γιατί το
κλειστά και φραγμένο στον $\mathbb{R}$
είναι συμπαγή ($\not\Leftarrow$ γενικό)

$([a,b], \rho_\delta)$ είναι συμπαγής ?
Όχι
ανοιχτό κάλυμμα χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα



$$[a,b] = \bigcup_{x \in [a,b]} \{x\}$$

Στην $|\cdot|$, το $\{x\}$ δεν είναι ανοιχτό

$(\{x\})^c = (-\infty, x) \cup (x, +\infty)$ είναι ανοιχτό
γιατί $\nexists$ μπαλίτσα (= ανοιχτό διάστημα)
που περιέχεται στο $(x, +\infty)$

Άρα το $\{x\}$ με την $|\cdot|$ είναι κλειστό.

Με τη ρ_δ, το $\{x\} \subseteq (\mathbb{R}, \rho_\delta)$:

Κάθε υποσύνολο του διακριτού μ.χ. είναι ταυτόχρονα
ανοιχτό και κλειστό.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\{x\} = A$ ανοιχτό διότι:
$$U = B_{\rho_\delta}\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$$

δηλ. $\{x\}$ γράφεται ως μπάλα και κάθε μπάλα είναι
ανοιχτό.

Scanned by CamScanner

Αφού κάθε μονοσύνολο ανοικτό, γιατί και κάθε υποσύνολο ανοικτό;

→ Επειδή είναι ένωση μονοσυνόλων

δηλ. αυθαίρετη ένωση σφαιρών που είναι ανοιχτά

Άσκηση από H/W: $x_n \xrightarrow{(E,\rho)} x \Rightarrow \{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ συμπαγές

Το είχαμε αποδείξει με τον ορισμό.

Μην δοκιμάσετε με ακολουθιακή συμπάγεια

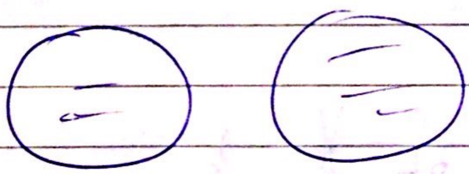
Άσκηση 3 / σελ. 486: ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ

Συνεκτικότητα

$(0,1)\cup(1,2)$ χωρίζεται σε δύο ανοιχτά κομμάτια

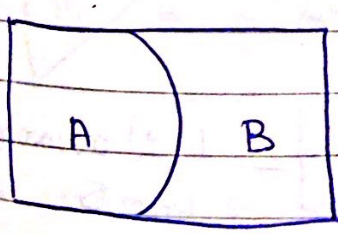
↓

συνεκτικό



όχι συνεκτικό

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Πότε θα λέμε ότι η $\{A,B\}$ με $A\subseteq E$, $B\subseteq E$ είναι διαμέριση του E.



i) $A\cup B=E$

ii) $A\cap B=\emptyset$

iii) $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$

Scanned by CamScanner

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 $\{A,B\}$, $A,B \subseteq (E,\rho)$
είναι ανοικτή διαμέριση (ή κλειστή)
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \{A,B\} \text{ διαμέριση} \\ A,\ B \text{ ανοιχτά (ή κλειστά)} \end{cases}$$

Παρατήρηση: $\{A,B\}$ ανοικτή διαμέριση $\Longleftrightarrow$ $\{A,B\}$ κλειστή

Απόδειξη

" $\Longrightarrow$ "

Έστω $\{A,B\}$ ανοιχτή διαμέριση.

$$E = A \cup B$$
$$\Longrightarrow \left.\begin{cases} B = A^c \xrightarrow{A \text{ ανοιχτό}} A^c = B \text{ κλειστό} \\ A = B^c \xrightarrow{B \text{ ανοιχτό}} B^c = A \text{ κλειστό} \end{cases}\right\} \Longrightarrow \{A,B\} \text{ κλειστή}$$

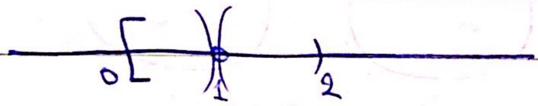
" $\Longleftarrow$ "

όμοια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 (E,ρ) συνεκτικός
$\Longleftrightarrow$ αν $\nexists$ $\{A,B\}$ ανοιχτή (ή κλειστή) διαμέριση

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 (E,ρ), $S \subseteq E$
S συνεκτικό $\Longleftrightarrow$ (S, ρ_S) συνεκτικός

Παράδειγμα:



$$S = [0,1) \cup (1,2) \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

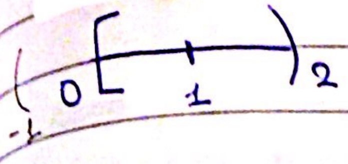
→ δηλ. η απόσταση
$\exists$? ανοιχτή διαμέριση του $(S, |\cdot|_S)$ περιορισμένη στο S

$$\left.\begin{array}{l} (1,2) \text{ ανοιχτό στο } S \text{ αφού } (1,2) = S \cap (1,2) \\ (1,2) \text{ ανοιχτό στο } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow (1,2) \text{ ανοιχτό στο } S$$

$[0,1)$ είναι στο S ανοιχτό;

Scanned by CamScanner

στο $\mathbb{R}$ το $[0,1)$ δεν περιέχει μια μπαλίτσα, δεν είναι ανοιχτό.



$[0,1) = S \cap G$ όπου G ανοιχτό στο $\mathbb{R}$

Ένα τέτοιο G είναι, $G = (-1,1)$ το οποίο είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow G \cap S = [0,1)$ ανοιχτό στο S

Άρα το γράψαμε σαν ένωση ανοιχτών:

$S = [0,1) \cup (1,2)$

$= (G \cap S) \cup ((1,2) \cap S)$ (είναι δηλ. μια ανοιχτή διαμέριση και είναι και ανοιχτά)

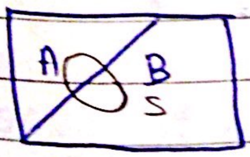
$\Rightarrow \{[0,1), (1,2)\}$ ανοιχτή διαμέριση του S

$\Rightarrow S$ όχι συνεκτικό

ΓΕΝΙΚΑ ΟΠΟΙΟ ΣΥΝΟΛΟ ΧΩΡΙΖΕΤΑΙ, ΚΑΙ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΔΡΟΜΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΕΝΑ ΣΤΟ ΑΛΛΟ, ΠΕΡΙΜΕΝΟΥΜΕ ΝΑ ΜΗΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ

Άσκηση: (ΠΡΟΤΑΣΗ) $\left.\begin{array}{l}\{A, B\} \text{ ανοιχτή διαμ. του } (E,\rho) \\ S \subseteq E,\ S \text{ συνεκτικό}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow S \subseteq A$ ή $S \subseteq B$



Λύση

Ας υποθέσουμε ότι $\begin{cases} S \cap A \neq \emptyset \\ S \cap B \neq \emptyset \end{cases}$

Άρα, $S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$ αφού $A \cup B = E$.

Scanned by CamScanner

A ανοιχτό στο $E \Rightarrow A\cap S$ ανοιχτό στο S
Παρόμοια, $B\cap S$ ανοιχτό στο S

$(A\cap S)\cup(B\cap S) = S$
και
$(A\cap S)\cup(B\cap S) = \emptyset$ επειδή $A\cap B = \emptyset$

Άρα, $\{A\cap S, B\cap S\}$ ανοιχτή διαμέριση του S

$\Downarrow$

S όχι συνεκτικό ↯

ΠΡΟΤΑΣΗ (E,ρ) είναι συνεκτικό

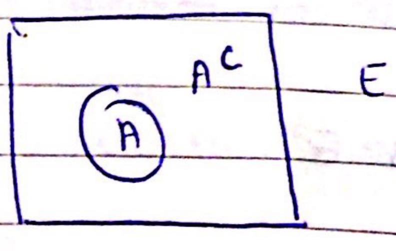
$\iff$ τα μόνα ανοιχτά και κλειστά $\subseteq E$ είναι τα $\emptyset$, E $(*)$

Απόδειξη
(E,ρ)
E ανοιχτό
E κλειστό : E^c αν
$\quad = \emptyset$
$\Rightarrow E, \emptyset$ αν $\subseteq E$
$\quad E, \emptyset$ κλ. $\subseteq E$

"$\Longrightarrow$"
Υποθέτουμε ότι (E,ρ) συνεκτ.
$\Rightarrow \exists A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$, $A \neq E$

Παίρνω με άτοπο. Έστω ότι δεν ισχύει το $(*)$

A αν. και κλ. υποσ.



Scanned by CamScanner

$\Rightarrow \{A, A^c\}$ ανοιχτή διαμ. του E

↯ αφού (E,ρ) συνεκτικός

"$\Leftarrow$"

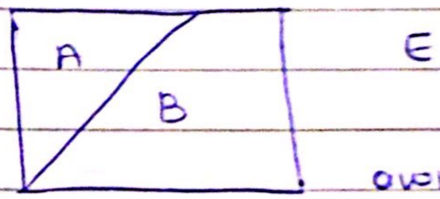
Έστω ότι ισχύει το $(*)$. ΘΔο (E,ρ) συνεκτικός

Έστω ότι (E,ρ) όχι συνεκτικός. $E = A \cup B$

$A \cap B = \emptyset$

$A \neq \emptyset \neq B$

A, B ανοιχτά



ανοιχτή διαμ.

$$\left.\begin{array}{l} A \neq \emptyset \\ A \neq E \\ A \text{ ανοιχτό} \\ \left.\begin{array}{l} A = B^c \\ B \text{ ανοιχτό} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ κλειστό} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Άρα, $A \neq \emptyset$

$A \neq E$

ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα ↯ λόγω του $(*)$

Άσκηση: $\left.\begin{array}{l} f : (E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2) \text{ συνεχής, επί} \\ f(E_1) = E_2 \\ E_1 \text{ συνεκτικός} \end{array}\right\} \Rightarrow E_2$ συνεκτικός

Λύση

$(S \subseteq E_1$, f συνεχής $\Rightarrow f(S)$ συνεκτικό$)$

$E_1 \xrightarrow{f} E_2$

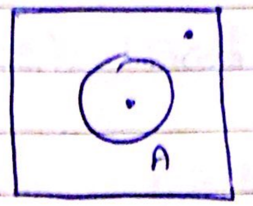
A ανοικτό και κλειστό $\subseteq E_2$. ΘΔο $A = \emptyset$ ή $A = E_2$

Scanned by CamScanner

Έστω ότι $\emptyset \subsetneq A \subsetneq E_2$.

$B = f^{-1}(A) \subseteq E_1$

E_2



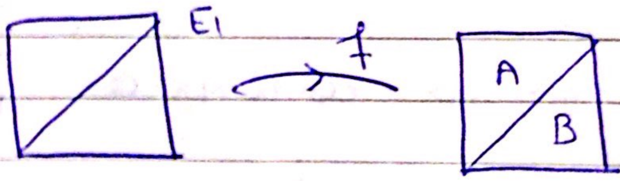
$f^{-1}(A) \neq \emptyset$
επειδή $A \neq \emptyset$
και η f είναι επί

$f^{-1}(A) \neq E_1$
επειδή $A \subsetneq E_2$
και η f είναι επί

Επίσης, $f^{-1}(A)$ ανοιχτό και κλειστό E_1
$f^{-1}(A) \neq \emptyset$
$f^{-1}(A) \neq E_1$
$\Rightarrow (E_1, \rho_1)$ όχι συνεκτικό ↯

Β' ΤΡΟΠΟΣ: Με τον ορισμό

$E_1 \xrightarrow{f} E_2$ συν. επί



Νδο. συνεκτ.

Αν E_2 όχι συνεκτ. $\exists$ ανοιχτή διαμ. $\{A, B\}$, όπου οι εικόνες είναι $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ ανοιχτή και κλειστή διαμέριση
$\Rightarrow E_1$ όχι συνεκτ.

↯

ΠΡΟΤΑΣΗ (E, ρ) μ.χ.
$S \subseteq E$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) S συνεκτικό

(2) $\nexists$ $\{A, B\}$ ανοιχτό κάλυμμα στο E του S: ($S \subseteq A \cup B$)

$S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$ και $S \cap A \cap B = \emptyset$

Παράδειγμα:

$S = [0, 1) \cup (1, 2) \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$

Ένα ανοιχτό κάλυμμα στο E είναι

$A = (-1, 1)$
$B = (1, 2)$ } ανοιχτά στο $\mathbb{R}$

και η ένωσή τους καλύπτει το S

$A \cap B \cap S = \emptyset$ (αλλιώς θα έπιανε το 1)

$S \cap A \neq \emptyset$

$S \cap B \neq \emptyset$

Άρα, S όχι συνεκτικό.

Απόδειξη Πρότασης

(1) $\Rightarrow$ (2) (Με άτοπο)

Ας υποθέσουμε ότι S συνεκτικό και ότι $\exists$ $\{A, B\}$ με

$S \subseteq A \cup B$, A, B ανοιχτά δηλ. φεύγουν έξω από το S

$A \cap S \neq \emptyset \neq S \cap B$

$S \cap A \cap B = \emptyset$

Είναι εύκολο να γράψουμε $S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$. Ναι

A ανοιχτό στο E $\Rightarrow$ $S \cap A$ ανοιχτό στο S, $S \cap A \neq \emptyset$

B ανοιχτό στο E $\Rightarrow$ $S \cap B \neq \emptyset$, ανοιχτό στο S

$(S \cap A) \cap (S \cap B) = S \cap A \cap B = \emptyset$

Άρα, $\{S \cap A, S \cap B\}$ είναι μια ανοιχτή διαμ. του S

$\Rightarrow$ S όχι συνεκτικό ↯

Scanned by CamScanner

(2) ⇒ (1)

∄ κάλυμμα (όπως έχω το (2))

Θδο S είναι συνεκτικό $\subseteq E$

Έστω ότι S όχι συνεκτικό $\subseteq E$.

(S, ρ_S) όχι συνεκτικό

$\Rightarrow \exists\, A \neq \emptyset \neq B$, $A, B \subseteq S$: $S = A \cup B$

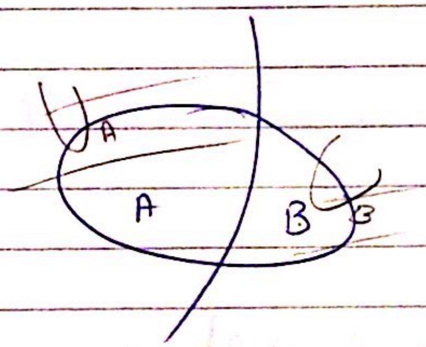
A, B ανοιχτά στο S, $A \cap B \neq \emptyset$

ένα ευρύτερο σύνολο (όπως $(-1,1)$)

A ανοιχτό στο S, $A \subseteq S$ $\Rightarrow \exists\, U_A \subseteq E$ ανοιχτό : $A = U_A \cap S$

Παρόμοια, εφόσον B ανοιχτό στο S $\Rightarrow \exists\, U_B$ ανοιχτό στο E:

$B = U_B \cap S \subseteq U_B$



$A \cup B = S$

Άρα,
$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq U_A \\ B \subseteq U_B \\ A \cup B = S \end{array}\right\} \Rightarrow S \subseteq U_A \cup U_B \Rightarrow \{U_A, U_B\} \text{ ανοιχ. στο } E \text{ κάλυμμα του } S$$

Αλλ. $U_A \cap S = A \neq \emptyset$

$U_B \cap S = B \neq \emptyset$

$U_A \cap U_B \cap S = (U_A \cap S) \cap (U_B \cap S) = A \cap B = \emptyset$

Άρα βρίσκαμε τέτοιο κάλυμμα

↯ αφού υποθέσαμε ότι ∄

Scanned by CamScanner

ΠΡΟΤΑΣΗ (E,ρ) μ.χ.

$S_i \subseteq E$, S_i συνεκτικά, $i\in I$, $\bigcap\limits_{i\in I} S_i \neq \emptyset$

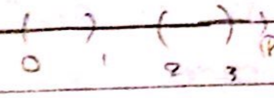
$\Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} S_i$ συνεκτικό

Τα μόνα συνεκτικά στο $\mathbb{R}$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $\overset{S}{\underset{\parallel}{}}\bigcup\limits_{i\in I} S_i$ όχι συνεκτικό $\Rightarrow$ $\begin{cases} \exists\ A, B \text{ αν. στο } S, \text{ είναι σε} \\ \text{ξένα}, \neq \emptyset \end{cases}$ διαστήματα

Άρα, $\bigcup S_i = A\cup B$

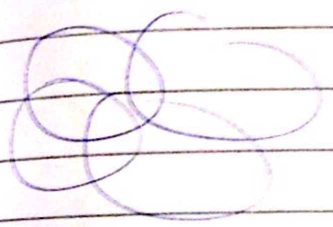


$\bigcap\limits_{i\in I} S_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ o \in \bigcap\limits_{i\in I} S_i$

σε ένωση όχι συνεκτικό

$\Rightarrow o \in S_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow$ θέλω κοινό σημείο



$S_i \subseteq \bigcup S_i = A\cup B$, $B\neq\emptyset$

άρα γράφουμε $S_i = (S_i \cap A)\cup(S_i\cap B)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $o\in A$ και $o\notin B$ $(A\cap B = \emptyset)$

$(o \in \bigcap S_i \subseteq \bigcup S_i = A\cup B)$

Σταθεροποιούμε ένα i.

$o\in A$, $o\in S_i \Rightarrow \underset{\neq\emptyset}{S_i\cap A} \supseteq \{o_i\} \neq \emptyset$

Θ.δ.ο. $S_i\cap A$, $S_i\cap B$ ανοικτά στο S_i

S_i συνεκτικό, $S_i\cap A \neq \emptyset$ $\forall i\in I \Rightarrow S_i \cap B = \emptyset$

Άρα, $S_i \cap A = S_i$

δηλ.

$S_i \subseteq A \ \forall i\in I \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{S}}{\bigcup S_i} \subseteq A$

↯ γιατί $A\cap B = \emptyset$

Scanned by CamScanner

Άσκηση: $A \subseteq S_i \subseteq S \subseteq (E,\rho)$, A ανοιχτό στο S $\Rightarrow$ A ανοιχτό στο S_i

Λύση

$A \subseteq S_i \subseteq S \Rightarrow A \subseteq S$ ανοιχτό στο $S \subseteq E$

$\Rightarrow G$ ανοιχτό στο E : $A = S \cap G$

$\Rightarrow A$ ανοιχτό του S_i,

διότι:

$$\underbrace{A \cap S_i}_{= A} = \underbrace{(S \cap G) \cap S_i}_{= S_i \cap G}$$

$$A = S_i \cap G$$

G ανοιχτό εν E

Με τη βοήθεια αυτού, δες πάλι την προηγούμενη απόδειξη για καλύτερη κατανόηση.

Scanned by CamScanner